MAT302 DİFERANSİYEL GEOMETRİ II DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

17.06.2020

SORU1: $f(x,y,z)=x^2yz-y+z-5=0$ denklemi ile verilen yüzeyin $P(0,0,5)$ noktasındaki normal vektörünü ve teğet düzleminin denklemini bulunuz. **(20 puan)**

SORU2: Geodeziklerin her noktalarındaki hız vektörlerinin uzunluklarının sabit olduğunu gösteriniz. **(20 puan)**

SORU3: $\phi(u,v)=(\cos u,\sin u,v)$ yüzeyinin şekil operatörünün matrisini bulunuz. **(20 puan)**

SORU4: M, E^3 de bir yüzey ve $\vec{u}_p,\vec{v}_p\in T_M(P)$ olsun. $S(\vec{v}_p)\,\mathrm{x}\,S(\vec{u}_p)=K(P)(\vec{v}_p\,\mathrm{x}\,\vec{u}_p)$ olduğunu gösteriniz **(20 puan)**

SORU5: Dayanak eğrisi $\alpha(t)=(t,2t,1)$ ve tepe noktası $T=(0,0,1)$ olan koninin denklemini bulunuz. **(20 puan)**

Prof. Dr. Emin KASAP

CEVAPLAR

1) $f(x,y,z) = x^2yz - y + z - 5 = 0$ denklemi ile verilen yüzeyin $P(0,0,5)$ noktasındaki normal vektörünü ve teğet düzleminin denklemini bulunuz.

$$\vec{\nabla} f|_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_P , \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_P , \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_P \right)$$

$$= \left(2xyz|_P , (x^2z-1)|_P , (x^2y+1)|_P \right)$$

$$= (0, -1, 1) \rightarrow \text{normal vektörü}$$

Teğet düzleminin denklemi,

$$-y + z + d = 0 \quad P \text{ için } 5 + d = 0 \Rightarrow d = -5$$

$$\Rightarrow y - z + 5 = 0 \rightarrow \text{teğet düzlemin denklemi}$$

---

2) Geodeziklerin her noktalarındaki hız vektörlerinin uzunluklarının sabit olduğunu gösteriniz.

$\|\alpha'(t)\| = \text{sabit}$ olduğunu göstereceğiz.

$$\frac{d}{dt}\|\alpha'(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle$$

$$= \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle + \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle \text{ olur.}$$

$$= 2\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle$$

α geodezik old. dan $\alpha''(t) \in T_M^{\perp}(\alpha(t))$ olup $\alpha'(t) \in T_M(\alpha(t))$ ve

$$\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|\alpha'(t)\|^2 = 0 \Rightarrow \|\alpha'(t)\|^2 = \text{sabit}$$

$$\Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \text{sabit}.$$

3) $\phi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ yüzeyinin şekil operatörünün matrisini bulunuz.

$\phi_u = (-\sin u, \cos u, 0)$, $\phi_v = (0,0,1) \Rightarrow \|\phi_u\| = \|\phi_v\| = 1$ dir.

$X = \phi_u$, $Y = \phi_v$ alınırsa $\{X, Y\}$ yüzeyin vektör alanları uzayının ortonormal bazı olur.

$$N = X \times Y = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$S(X) = D_X N = D_{\phi_u} N = \frac{dN}{du} = (-\sin u, \cos u, 0) = 1X + 0Y$$

$$S(Y) = D_Y N = D_{\phi_v} N = \frac{dN}{dv} = 0 = 0X + 0Y$$

O halde S nin matrisi $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olur.

---

4) M, E^3 de bir yüzey ve $\vec{U}_p, \vec{V}_p \in T_M(p)$ olsun.

$S(\vec{V}_p) \times S(\vec{U}_p) = K(p)(\vec{V}_p \times \vec{U}_p)$ olduğunu gösteriniz.

1- $\{\vec{U}_p, \vec{V}_p\}$ lineer bağımlı ise $\vec{U}_p = \lambda \vec{V}_p$ dir.

$$\Rightarrow S(\vec{V}_p) \times S(\vec{U}_p) = S(\vec{V}_p) \times S(\lambda \vec{V}_p) = \lambda S(\vec{V}_p) \times S(\vec{V}_p) = 0$$

$$K(p)(\vec{V}_p \times \vec{U}_p) = K(p)(\vec{V}_p \times \lambda \vec{V}_p) = K(p)\lambda(\vec{V}_p \times \vec{V}_p) = 0$$

olup $S(\vec{V}_p) \times S(\vec{U}_p) = K(p)(\vec{V}_p \times \vec{U}_p)$ dur.

2- $\{\vec{U}_p, \vec{V}_p\}$ lineer bağımsız ise $T_M(p)$ nin bazını oluşturur.

Bu durumda $S(\vec{U}_p) = a\vec{U}_p + b\vec{V}_p$, $S(\vec{V}_p) = c\vec{U}_p + d\vec{V}_p$ olup

$S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ve $K(p) = ad - bc$ dir.

$$\Rightarrow S(\vec{V}_p) \times S(\vec{U}_p) = (c\vec{U}_p + d\vec{V}_p) \times (a\vec{U}_p + b\vec{V}_p)$$

$$= (ad - bc)\, \vec{V}_p \times \vec{U}_p$$

$$= K(p)\, \vec{V}_p \times \vec{U}_p \quad \text{bulunur.}$$

5) Dayanak eğrisi $\alpha(t) = (t, 2t, 1)$ ve tepe noktası $T(0,0,1)$ olan koninin denklemini yazınız.

$$(x,y,z) = (t, 2t, 1) + \lambda(-t, -2t, 0)$$

$$\Rightarrow x = t - \lambda t$$
$$y = 2t - 2\lambda t \quad \Rightarrow \quad y = 2x, \; z = 1 \text{ bulunur.}$$
$$z = 1$$